

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЗОН РАЗРУШЕНИЯ
ПОРОД ВОКРУГ ДЛИТЕЛЬНО ЭКСПЛУАТИРУЕМЫХ
ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК**

Наведені аналітичні залежності розрахунку зон непружних деформацій навколо гірничих виробок.

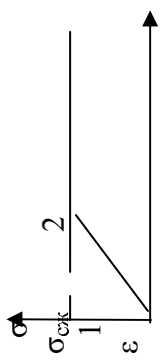
**THE ANALYTICAL SPECIFICATION STATEMENT OF BANDS
OF BREAKING DOWN SOILS AROUND DURABLE EXPLOITED
MINE WORKINGS**

The analytical dependences of calculation of bands of inelastic strains around of mine workings are reduced.

К настоящему времени накоплен огромный как теоретический, так и экспериментальный материал, который позволяет в первом приближении сформулировать научные принципы по прогнозированию форм и параметров зон разрушения в окрестности подземных горных выработок [1, 2] и на их основе разработать методические рекомендации оценки степени устойчивости в виде предварительной классификации по размерам зон разрушения, как наиболее информативному показателю состояния породного массива при его взаимодействии с крепью. Рассмотрены основные аналитические формулы для определения радиуса зоны пластических деформаций, неупругих деформаций, остаточного или руинного разрушения, которые основаны на различных механических моделях породного массива и условиях предельных состояний пород (табл. 1). Кроме того, рассмотрены корреляционные связи радиуса зоны разрушения с основными влияющими факторами и эмпирико-аналитические формулы, которые предлагается корректировать для получения различных форм зон разрушения экспериментальными зависимостями прочности пород от направлений слоистости и напластования.

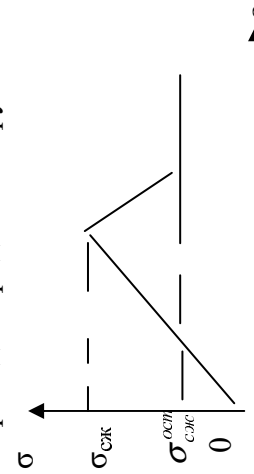

Приведенные в табл. 1 формулы справедливы для идеализированных условий и для выработок, проведенных в однородных изотропных средах. Для неоднородного слоистого или ослабленного системами трещин породного массива напряженно-деформированное состояние пород, размеры и форма области неупругих деформаций зависят не только от их прочности и глубины, но и от других неучтенных факторов – мощности и прочности слоев, а также от их угла залегания. Сложность граничных условий, неоднородность и изменчивость среды, неопределенность положения упруго-пластической границы существенно сужают возможности применения аналитических формул таблицы 1 для задач прогноза размеров и формы области неупругого деформирования или разрушения. Ряд таких ограничений может быть снято применением эмпирико-аналитических методов, основанных на использовании проверенной аналитической формулы с конкретными исходными данными приближенными к характеристикам породного массива.

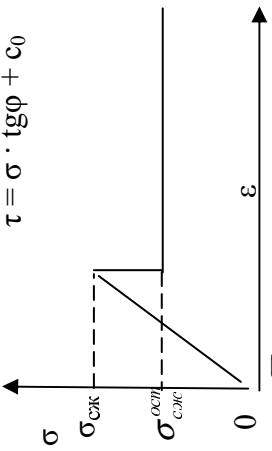
Таблица 1. Аналитические зависимости для определения зон неупругих деформаций, пластичности или разрушения

№№ п/п	Авторы	Тип механической модели и условие прочности
<p>1. Феннер (1938,1961), [4,5] Вестергард (1940), [6] Лабасс (1949,1961) [7,8] Кестнер (1949) [9,10] Талобр (1957,1960) [11,12] Руппенейт (1954) [22] Фисенко (1971,1976)[13,14]</p>	<p>Относительный радиус пластической зоны неупругих деформаций, зоны разрушения и др.</p> $\frac{R}{r} = \left\{ \frac{2[\mathcal{H}(\beta - 1) + \sigma_{сжк}]}{(\beta + 1)[P(\beta - 1) + \sigma_{сжк}]} \right\}^{\frac{1}{\beta - 1}}$ <p>r – радиус подземной выработки; R – радиус пластической зоны; γ – объемный вес пород; H – глубина заложения выработки; $\sigma_{сжк}$ – предел прочности на сжатие; P – отпор крепи (давление на крепь); $\beta = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$ – так называемый коэффициент пассивного давления породы (или параметр объемной прочности); φ – угол внутреннего трения. Условие пластичности в главных напряжениях σ_I и σ_3 $\sigma_I = \sigma_{сжк} + \beta \cdot \sigma_3$, где $\sigma_I > \sigma_3$ $\sigma_{сжк} = \frac{2c \cdot \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$ Другая запись этой формулы: $\frac{R}{r} = \left[\frac{(\mathcal{H} + c \cdot ctg \varphi)(1 - \sin \varphi)}{P + c \cdot ctg \varphi} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$, где $\alpha = \frac{2 \cdot \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$ $\frac{R}{r} = \left[\frac{\mathcal{H} (1 - \sin \varphi)}{P} \right]^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\frac{2\mathcal{H}}{P(\beta + 1)} \right]^{\frac{1}{\beta - 1}}$ c – коэффициент сцепления равен 0</p>	<p>Линейная упруго-пластическая связная среда (породный массив с «нулевой хрупкостью»). Формула получена из условия «несжимаемости» материала в процессе пластических деформаций, т.е из условий отсутствия изменения объема. Диаграмма упруго-пластической модели:</p>  <p>область упругих деформаций, область пластических деформаций . Условие пластичности $\tau = c + \sigma \cdot tg \varphi$, где $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ c – коэффициент сцепления; φ – угол внутреннего трения Несвязная сыпучая среда с нулевым сцеплением, $c=0$</p>

2	<p>Кокот, Карисел (1949) [15] Талобр (1960) [12] Мостков (1963) [16]</p>	$P = \frac{\mathcal{R}}{\alpha - 1} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha-1} \right] - c \cdot ctg\varphi \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha} \right].$ <p>Для несвязной сыпучей среды (с=0) уравнение упрощается</p> $P = \frac{\mathcal{R}}{\alpha - 1} \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\alpha-1} \right],$ <p>однако остается нелинейным относительно R.</p>	<p>Модель зоны нарушенных пород над выработкой. Механизм и причина образования зоны не рассматриваются. Условие прочности $\tau = \sigma \cdot tg\varphi + c$</p>
3	<p>Галин (1946) [17]</p>	<p>Уруго-пластическая задача для бесконечной плоскости с круговым отверстием. Однородное напряженное состояние на бесконечности. Уруго-пластическая граница представляет собой эллипс с полуосями (*) $a = c(1+\delta)$, $b = c(1-\delta)$, где $c = r \cdot \exp\left(\frac{A+B}{4K}\right) - \frac{P+c}{2K}$; $\delta = \frac{B-A}{2K}$, $\sigma_x^{\infty} = A$, $\sigma_y^{\infty} = B$, $\sigma_r = P$.</p>	<p>Идеально-пластическая горная порода. Условие пластических деформаций Треска-Сен-Венана $\sigma_1 - \sigma_3 = 2K$, где K – пластическая постоянная магериаала</p>
4	<p>Ивлев (1956, 1957) [18, 19] Сажин (1968) [20]</p>	<p>При $\sigma_x^{\infty} = \mathcal{H}$, $\sigma_z^{\infty} = \lambda_2 \mathcal{H}$, для формулы (*) имеем $c = r \cdot \exp\left(\frac{\lambda_1 \cdot \gamma \cdot H - P - K}{2K}\right)$, $\delta = \frac{\lambda \mathcal{H}}{2K}$ где λ_2 – коэффициент бокового давления, $\lambda_1 = \frac{1 + \lambda_2}{2}$; $\lambda = \frac{1 - \lambda_2}{2}$, γ – объемный вес горной породы; H – глубина заложения выработки</p>	<p>Идеально-пластическая горная порода (например, пластическая глина, которая имеет очень незначительное внутреннее трение)</p>

5	<p>Рупшенйт (1953, 1954) [21, 22]</p>	<p>Упруго-пластическая задача</p> $\sigma_y^\infty = \mathcal{H}, \quad \sigma_x^\infty = \lambda_2 \mathcal{H}. \text{ На контуре } \sigma_r = P.$ $\frac{R}{r} = R_0 + \lambda R_1(\theta), \quad \text{где}$ $R_0 = \left[\frac{(1 - \sin \varphi)(\lambda_1 \mathcal{H} + c \cdot ctg \varphi)}{P + c \cdot ctg \varphi} \right]^{1/a},$ $R_1(\theta) = \frac{\mathcal{H} \cdot R_0 (2 - \sin \varphi) \cos 2\theta}{2 \sin \varphi (\lambda_1 \mathcal{H} + c \cdot ctg \varphi)}, \quad \text{где}$ <p>θ – угол, отсчитываемый от горизонтальной оси выработки</p>	<p>Условие пластичности – прямолинейная огибающая: $\tau = \sigma \operatorname{tg} \varphi + c$</p> <p>Порода обладает внутренним трением и сцеплением.</p> <p>Конфигурация зоны упругих деформаций – граница между упругой и пластической областями приближается к сплюсненному по малой оси горизонтально расположенному эллипсу (рис. 1а).</p>
6	<p>Рупшенйт (1954) [22]</p>	$\frac{R}{r} = \left[\frac{(1 - \sin \varphi)(\mathcal{H} + c \cdot ctg \varphi)}{P + c \cdot ctg \varphi} \right]^{1/a}, \quad \text{где}$ $\alpha = \frac{2 \cdot \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad c - \text{коэффициент сцепления породы}$	<p>Условие пластичности принято в виде линейной огибающей в полярной системе координат:</p> $(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = \sin \varphi (\sigma_\theta + \sigma_r + 2c \operatorname{ctg} \varphi)$
7 7а	<p>Талобр (1957), (1960) [11, 12]</p> <p>Сажин (1967), [23]</p>	$\frac{R}{r} = \left[\frac{(1 - \sin \varphi) \mathcal{H}}{c \cdot ctg \varphi} + 1 \right]^{1/a} + 1$ <p>горная выработка</p> $\frac{R}{r} = \left\{ \frac{\alpha + n}{\alpha(1-b) + n} (1 - \sin \varphi) \left(\frac{\mathcal{H}}{c \cdot ctg \varphi} + 1 \right) \right\}^{1/a},$ <p>где n принимают ~ 3; коэффициент b, определяется из выражения:</p> $b = (1-B) \left(1 + \frac{a}{r}\right)^3, \quad B - \text{отношение коэффициента сцепления на границе зоны повышенной трещиноватости к коэффициенту сцепления в массиве; } a - \text{размер зоны повышенной трещиноватости пород; } P=0$	<p>Упруго-пластическая задача.</p> <p>Условие пластичности в форме $\sigma_\theta - \sigma_r = \sin \varphi \cdot (\sigma_\theta + \sigma_r + 2c \cdot ctg \varphi)$</p> <p>Сцепление меняется по закону:</p> $c(R) = c \left(1 + \frac{b}{R^n} \right),$ <p>где c – коэффициент сцепления породы в ненарушенном массиве; b – коэффициент, зависящий от прочностных свойств породы и размеров выработки; R – безразмерный радиус рассматриваемой точки,</p>

8	Сажин (1960) [20]	<p>При гидростатическом напряжении на бесконечности контуром области неупругих деформаций является окружность с относительным радиусом</p> $\frac{R}{r} = \exp\left(\frac{\mathcal{M} - P - c}{2c}\right).$ <p>Для незакрепленной горной выработки:</p> $\frac{R}{r} = \left[\frac{(\mathcal{M} + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi)(1 - \sin \varphi)}{c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} \right]^{1/\alpha}.$	<p>отсчитываемый от центра выработки; n - коэффициент, учитывающий характер деформации среды.</p> <p>Идеально пластическая среда.</p> <p>$P=0$ (отпор крепи минимальный или незакрепленная горная выработка).</p>
9	Дружко (1968) [24] Дружко, Заславский, Перепица (1975) [25]	$P = \left[\frac{3c \cdot \cos \varphi}{\alpha - 1} + \frac{2\mathcal{M}}{2 + \alpha} - K \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot \frac{\left(\frac{R}{R_c}\right)^\alpha - 1}{(\alpha - 1) \left(\frac{R}{R_c} - 1\right)} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]^2,$ <p>где R_c - граница между зоной полного разрушения, в которой $c = 0$ и зоной постепенного разрушения</p>	<p>Между зоной полного разрушения и упругим массивом выделена зона постепенного перехода породы в ненарушенное состояние</p> 
10	Либерман (1969) [26]	$\frac{R}{r} = \left[\frac{2\mathcal{M} - \sigma_{сжк}}{(\beta_1 + 1)P} \right]^{\frac{1}{\beta_2 - 1}},$ <p>где</p> $\beta_1 = \frac{1 + \sin \varphi_1}{1 - \sin \varphi_1}; \quad \varphi_1 - \text{угол внутреннего трения ненарушенного материала};$ $\beta_2 = \frac{1 + \sin \varphi_2}{1 - \sin \varphi_2}; \quad \varphi_2 - \text{угол внутреннего трения для пород разрушенной зоны};$ <p>R - радиус зоны разрушения.</p>	<p>Хрупкая среда, разрушающаяся породный массив с бесконечной хрупкостью</p>  <p>Предел упругости является одновременно пределом прочности</p> <p>$\tau = c + \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$ - условие прочности пород в ненарушенной зоне</p> <p>$\tau = \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi_2$ - условие прочности пород для разрушенной зоны</p>

11	Либерман (1969) [26] Эггер (1973) [27]	При $\varphi_1 = \varphi_2$ $\frac{R}{r} = \left[\frac{(2\mathcal{M} - \sigma_{сжк})(1 - \sin \varphi)}{2P} \right]^{1/\alpha} = \left[\frac{2\mathcal{M} - \sigma_{сжк}}{(\beta + 1)P} \right]^{\frac{1}{\beta - 1}}$	Угол внутреннего трения $\varphi_1 = \varphi_2$ остается одним и тем же при разрушении.
12	Алимжанов (1971, 1982) [28.29]	$\frac{R}{r} = \left[\frac{\left(\frac{\mathcal{M} - \frac{\sigma_{сжк}}{2}}{P + c_0 \cdot ctg \varphi} \right) \cdot (1 - \sin \varphi) + c_0 \cdot ctg \varphi}{P + c_0 \cdot ctg \varphi} \right]^{1/\alpha},$ <p>c_0 – некоторое сцепление породы в массиве, $c_0 < c$.</p>	 <p>Порода в зоне разрушения обладает некоторым сцеплением или остаточной прочностью</p>
13	Баклашов, Картозия (1975) [30] Баклашов (1988) [31]	Для незакрепленной выработки $P = 0$; образование зоны разрушенных пород в результате хрупкого разрушения $\frac{R}{r} = \left[\left(\frac{2\mathcal{M} - \sigma_{сжк}^*}{2 + \alpha} + \frac{\sigma_{сжк}^*}{\alpha} \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha P + \sigma_{сжк}^*} \right) \right]^{1/\alpha},$ <p>где R – радиус области предельного равновесия. $\sigma_{сжк}^*$ – прочность нарушенных пород (остаточная прочность) при нарушении сплошности материала</p>	Гидростатические напряжения. Условие прочности Мора для хрупких горных пород. В области предельного равновесия $\sigma_{\theta} - (\alpha + 1)\sigma_r = \sigma_{сжк}^*,$ а вне области предельного равновесия $\sigma_{\theta} - (\alpha + 1)\sigma_r = \sigma_{сжк}$
		Условия пластичности $\sigma_{\theta} - (2\lambda + 1)\sigma_r = \sigma_{сжк}^*.$	

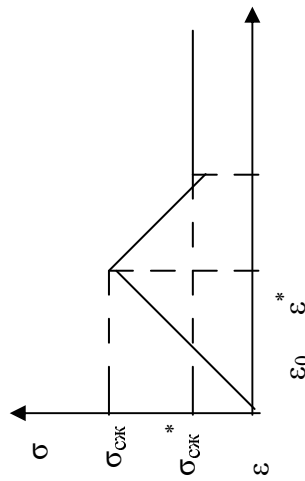
		$\frac{R}{r} = \left[\frac{\mathcal{H} + \frac{\sigma_{сжс}}{2}}{1 + \frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha P + \sigma_{сжс}} \right) \right]^{1/\alpha},$ $\frac{R}{r} = \exp \left(\frac{\mathcal{H} - P}{\sigma_{сжс}} - \frac{1}{2} \right)$	<p>Пластичные породы при $\varphi = 0$</p> <p>$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_{сжс}$ - условие идеальной пластичности</p>
14	<p>Фисенко (1976) [14]</p> <p>Костомаров (1977) [32]</p>	$\frac{R}{r} = \left\{ \frac{2[\mathcal{H} \cdot (\beta_M - 1) + \sigma_\infty^M]}{(\beta_M + 1) \cdot [P(\beta_M - 1) + \sigma_\infty^M]} \right\}^{\frac{1}{\beta_M - 1}},$ <p>где $\beta_M = \frac{1 + \sin \phi^*}{1 - \sin \phi^*}$,</p> <p>$\phi^*$ - угол трения пород в массиве;</p> <p>$\sigma_\infty^M = \lambda_\infty^M \cdot \sigma_{сжс}$, $\lambda_\infty^M = \lambda_M \cdot \lambda_\infty$;</p> <p>$\lambda_M$ = коэффициент структурного ослабления;</p> <p>λ_∞ = коэффициент длительной прочности;</p> <p>P – отпор крепи</p>	<p>Эмпирико-аналитическое решение, основанное на формуле Феннера (1938, 1961) [4,5] и Фисенко [14]</p>
15	<p>Парчевский Шашенко (1988) [33]</p>	$r_L^2 \cdot \ln r_L (r_L^2 - 1) = (\mathcal{H} - P_0) (2\mathcal{H} \cdot \sigma_{сжс} \cdot K_c)^{-\frac{1}{2}},$ <p>K_c – коэффициент структурного ослабления $K_c = 0,2 - 0,4$;</p> <p>$r_L = R_L / R_0$ - относительный радиус зоны неупругих деформаций;</p> <p>R_L – радиус зоны разрушения;</p> <p>R_0 – радиус выработки;</p> <p>P_0 – отпор крепи.</p>	$\sigma_{сжс}(r) = \sigma_{сжс} (c_1 + c_2 r^{-2})^2,$ $4r^2 - 2\sigma(1 - \psi) \sigma_{сжс} - \sigma_{сжс}^2 \cdot \psi = 0$ <p>(условие прочности); $\psi = \frac{\sigma_P}{\sigma_{сжс}}$</p>

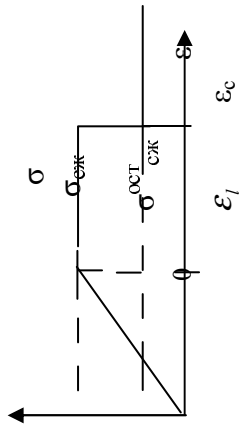
$$\frac{R}{r} = \left\{ \frac{2\mathcal{M} - \sigma_{сжс}}{\beta + 1} + \frac{\sigma_{сжс}}{\beta - 1} \right\} \left[1 - \left(\frac{\sigma_{сжс}^*}{\sigma_{сжс}} \right) \right] \cdot \left[\frac{\left(1 + \frac{E}{2M} \right) \left(1 - \frac{\sigma_{сжс}^*}{\sigma_{сжс}} \right)}{P + \frac{\sigma_{сжс}^*}{\beta - 1}} \right]^{\beta - 1}$$

где M – модуль спада; E – модуль упругости;

$\sigma_{сжс}^*$ – остаточная прочность. Кривая напряжение-деформация:

$$\sigma(\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{сжс}, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \left[1 - \frac{M}{E} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right) \right] \sigma_{сжс}, \quad \varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^* \\ \sigma_{сжс}^*, \quad \varepsilon > \varepsilon^* \end{array} \right.$$



17	Бульчев (1989) [35]	$\left(\frac{R}{r}\right)^\alpha = \left[\frac{(2M - \sigma_{сж}) (1 - \sin \varphi)}{2P} \right] \cdot \left(\frac{R}{R_1}\right)^\alpha - \frac{\sigma_{сж}}{\alpha P} \left[1 - \left(\frac{R}{R_1}\right)^\alpha \right],$ <p> R - радиус зоны разрушенных пород; R_1 - радиус зоны пластических деформаций; r - радиус выработки. В массиве вокруг выработки выделяют три зоны: зона упругих деформаций; зона пластических деформаций, протекающих без разрушения (радиус R_1); зона разрушения (радиус R) </p>	<p> Модель, в которой разрушению предшествует некоторая пластическая деформация </p>  <p> Достаточным условием для разрушения является достижение материалом предельных деформаций $\epsilon_c : \epsilon \leq \epsilon_c = \Pi_\epsilon \cdot \epsilon_l$, где ϵ_c - общая предельная деформация пород; Π_ϵ - характеристика пластичности (хрупкости) пород; $\Pi_\epsilon = \epsilon_c / \epsilon_l$, ϵ_l - упругая деформация. При $\epsilon_c = \epsilon_l$ (хрупкий материал), $\Pi_\epsilon = 1$. Чем больше величина Π_ϵ отличается от 1, тем более пластичной является порода. </p>
----	------------------------	---	--

18	Ставрогин, Протосена (1992) [36]	<p>Область пластических деформаций вокруг выработки круглого сечения с учетом анизотропии $\sigma_{сж} = \sigma_{сж}(\theta)$,</p> $K(\theta) = \frac{1 - \sin \varphi}{[(2 \cos \varphi \cdot \sigma_{сж}(\theta))]}$ <p>Нулевое приближение для нахождения относительного радиуса зоны пластических деформаций (критерий Кулона):</p> $\frac{R}{r} = \frac{1 - \sin \varphi [\lambda_1 \mathcal{H} + K(\theta) \operatorname{ctg} \varphi]}{P + K(\theta) \cdot \operatorname{ctg} \varphi},$ <p>где $\lambda_1 = (1 + \lambda) / 2$</p>	<p>Пластическая анизотропия пород характеризуется сцеплением, которое описывается зависимостью</p> $K(\theta) = K(1 + \delta \cos 2\theta).$ <p>Условие пластичности Кулона</p> $(\sigma_{\theta} - \sigma_r)^2 + 4\tau_{\theta}^2 = 4K^2(\theta),$ <p>θ – угол между плоскостью образца и направлением действия нагрузки, δ – постоянная, K – сцепление.</p>
		<p>Нулевое приближение для относительно радиуса зоны пластичности (критерий Мизеса)</p> $\frac{R}{r} = \exp \left\{ \lambda_1 \cdot \mathcal{H} \times \frac{P}{2K(\theta)} - \frac{1}{2} \right\}.$ <p>Учет угла падения пород приводит к повороту большой оси области предельных деформаций в виде эллипса на угол равный углу падения пород.</p>	<p>Условие пластичности Мизеса</p> $(\sigma_{\theta} - \sigma_r)^2 + 4\tau_{\theta}^2 = 4K^2 \cdot (1 + \delta \cos 2\theta).$

Таковыми характеристиками являются: прочность пород в массиве, длительная прочность, прочность многослойной (разномощной, разнопрочной) толщи, прочностная анизотропия слоистых массивов. Кроме того, существуют ряд корреляционных зависимостей, основанных на натуральных измерениях или на результатах моделирования на эквивалентных материалах с последующим уточнением экспериментальными данными. Такие зависимости не обладают достаточной для приложений общностью и носят ограниченный характер для своего использования. Однако рассмотрим такие работы, ибо они позволяют сориентироваться относительно факторов, оказывающих наиболее сильное влияние на радиус зоны неупругих деформаций. В большинстве работ по определению R было установлено [33], что радиус зоны неупругих деформаций зависит от ряда горно-геологических и геомеханических факторов, которые комплексно можно выразить через параметр

$$\theta = \frac{\gamma H - P}{\lambda_M \sigma_{сж}}$$

Данные ряда натуральных исследований подтверждает достаточную достоверность такой корреляционной зависимости [33]:

$$\frac{R}{r} = 0.8 \cdot \exp(0.5\theta)$$

В этом выражении фигурируют два основных фактора, определяющих условия формирования и развития процесса разрушения: параметр θ , характеризующий горно-геологические условия эксплуатации выработки, включающие глубину залегания H , прочность окружающих пород $\sigma_{сж}$ с оценкой их структурных особенностей λ_M и отпор крепи P . Полученная эмпирическая формула связана в некоторой степени с аналитическим решением упруго-пластической задачи

$$\frac{R}{r} = \exp\left(\frac{\gamma H - P}{\bar{\sigma}_{сж} \lambda_M} - \frac{1}{2}\right),$$

где $\bar{\sigma}_{сж}$ – некоторая средняя остаточная прочность, приобретаемая породным массивом в результате однородного разупрочнения и разрыхления в пластической области.

В работе [3] предпринята попытка оценить важный для практики параметр R_{max} – расстояние от контура выработки до наиболее удаленной зоны разрушения. Теоретическое решение этой проблемы является затруднительным в связи с тем, что существующие решения не учитывают одновременной работы разрушенной и неразрушенной породы в зоне неупругого деформирования и из-

менение поля напряжений в окрестности выработки. Поэтому авторы работы [3] предложили эмпирическую зависимость, полученную на моделях из эквивалентных материалов и проверенную в натуральных условиях для незакрепленной выработки

$$R_{\max} = r \left[B \ln \left(\frac{\gamma H}{\lambda_M \cdot \sigma_{сж}} \right) + A \right],$$

где R_{\max} – расстояние от контура выработки до наиболее удаленной границы разрушения, м; γH – действующие напряжения в нетронутом массиве, МПа; $\lambda_M \sigma_{сж}$ – прочность массива пород на сжатие, МПа; r – радиус выработки, м; A, B – константы, определяемые экспериментально.

Для расчета по этой формуле важно точно знать действующие напряжения в массиве и фактическую его прочность с учетом влияния всех трещин и поверхностей ослабления.

Расчеты по формуле показывают, что расстояние R_{\max} возрастает с увеличением напряжений, и уменьшается с ростом прочности массива, однако, интенсивность изменения R_{\max} при этом снижается.

Полученные данные наблюдений и экспериментов указывают на своеобразную самоблокировку зональной дезинтеграции на определенных расстояниях от выработки и после этого наступает новое состояние устойчивого равновесия (самоорганизация разрушенного и неразрушенного породного массива), которое собственно и позволяет вести горные работы на больших глубинах. Поскольку R_{\max} – максимальный средний размер зоны разрушения, а зависимость R_{\max} от $\gamma H / \lambda_M \cdot \sigma_{сж}$ имеет логарифмический характер, то в первом приближении следует ожидать, что статистически R_{\max} будет иметь функцию распределения наибольших значений – так называемое распределение Гумбеля. Рассмотрим некоторые эмпирико-аналитические формулы для оценки радиуса зоны неупругих деформаций.

В работе [37], на основе теоретической кривой, описывающей линейные размеры зоны неупругих деформаций во времени [38]:

$$R_t = A(1 - e^{-ct}),$$

где A и c – неизвестные коэффициенты, которые зависят от поперечных размеров выработки, глубины заложения, угла падения и прочности вмещающих пород, предложена корреляционная зависимость, которая является первой попыткой изучить поведение радиуса зоны неупругих деформаций во времени. На основе анализа и обработки результатов натуральных замеров смещений массива пород в окрестности откаточных штреков, не подверженных влиянию очистных работ, с помощью глубинных реперов, установленных в двенадцати выработках на шахтах производственных объединений «Стахановуголь» и «Краснодонуголь» [37] были установлены корреляционные зависимости коэффициентов A и c от безразмерного параметра

$$\frac{\gamma H}{\sigma_{сж}}$$

где H – глубина заложения выработки; $\sigma_{сж}$ – прочность пород на одноосное сжатие; γ – объемная масса толщи пород, лежащей над выработкой.

Было установлено [37], что по данным натурных замеров значение коэффициента A при формировании зоны неупругих деформаций в направлении по нормали к напластованию пород, определяется из выражения

$$A = 7r \left(\frac{\gamma H}{\sigma_{сж}} \right),$$

где r – приведенный радиус поперечных размеров выработки. Теснота связи переменных (A/r и $\gamma H/\sigma_{сж}$) характеризуется коэффициентом корреляции $\eta=0,86$. Значение коэффициента c из результатов шахтных инструментальных наблюдений, было определено из выражения

$$c = 1,12 \left(\frac{\gamma H}{\sigma_{сж}} \right)$$

Коэффициент корреляции тесноты связи параметров c и $\gamma H/\sigma_{сж}$ характеризуется величиной $\eta = 0,78$.

Многочисленными исследованиями установлено, что при заложении выработок в однотипных породах, мало отличающихся по прочности, максимальные смещения как контура выработки, так и массива пород, окружающего ее, происходят в направлении, перпендикулярном напластованию пород. Соответственно смещения пород в данном направлении прямо пропорциональны радиусу зоны неупругих деформаций в этом же направлении и оба параметра (смещение и радиус) зависят в свою очередь от угла залегания пород. Проанализированные в работе [37] смещения пород вертикально в кровле, почве и горизонтально в боках по падению и восстанию относительно смещения пород по нормали к напластованию, позволили установить коэффициенты влияния угла падения на распределение смещений массива пород по вертикальным и горизонтальным осям симметрии поперечного сечения выработки. С помощью этих коэффициентов K_α и характера их изменения в зависимости от угла залегания слоев $\alpha = 5^0$ (5^0) 60^0 можно определить коэффициенты влияния угла падения пород на величину радиуса зоны неупругих деформаций:

- а) K_α^{kp} – для кровли выработки;
- б) K_α^n – для почвы выработки;
- в) $K_\alpha^{\delta n}$ – для боков со стороны падения;
- г) $K_\alpha^{\delta в}$ – для боков со стороны восстания.

Эти коэффициенты можно использовать также для определения величины

радиуса-вектора (границы зоны разрушения) в полярной системе координат, а затем подобрать соответствующую кривую для аналитического представления контура зоны разрушенных пород для различных инженерно-геологических условий залегания пород. В окончательном виде формула для определения переменных размеров зоны неупругих деформаций с учетом коэффициента влияния угла залегания пород K_α запишется

$$R_t = 7r \cdot K_\alpha \cdot \left(\frac{\gamma H}{\sigma_{с.жс}} \right) \left\{ 1 - \exp \left[-1.12 \left(\frac{\gamma H}{\sigma_{с.жс}} \right) t \right] \right\}$$

При расчетах вместо радиуса выработки r следует принимать половину ширины выработки, а для боков – половину высоты выработки. Полученное уравнение можно применять, как указывают авторы [37], для определения радиусов контуров смещений откаточных штреков, не подверженных влиянию очистных работ, в условиях Алмазно-Марьевского и Краснодонского геолого-промышленных работах или аналогичных с ними.

Изучение зоны неупругих деформаций вокруг одиночных выработок, величина ее размеров, как известно, необходимы для оценки смещения пород контура выработки и нагрузки на крепь. В зависимости от условий размер зоны неупругих деформаций в кровле выработки составляет величину порядка 6-10 м, а в боках выработки – 1,5-5 м [39]. Обширные натурные наблюдения, проведенные ВНИМИ, на Интинском месторождении [32] подтвердили общий характер развития зоны неупругих деформаций пород вокруг горных выработок. Интенсивное образование зоны неупругих деформаций как и величин смещений контура выработки происходит, как правило, в первые 2-8 месяцев после проходки выработки. Многочисленными исследованиями установлено, что размеры зоны неупругих деформаций зависят в первую очередь от следующих факторов:

- прочностных свойств пород в образце;
- длительной прочности пород (коэффициента длительной прочности пород);
- прочности горных пород в массиве, т.е. масштабного фактора (коэффициента структурного ослабления пород);
- глубины расположения выработки;
- размеров сечения выработки.

Поэтому наиболее универсальным критерием условия деформирования пород вокруг выработки предлагается [32] обобщенный показатель прочности массива, который определяется как отношение

$$\frac{\sigma_\infty^M}{\gamma H},$$

где σ_∞^M – длительная прочность массива пород; γH – наибольшее напряжение в массиве.

В свою очередь, длительная прочность массива определяется из выражения

$$\sigma_{\infty}^M = \sigma_0 \cdot \lambda_{\infty}^M, \quad \lambda_{\infty}^M = \lambda_M \cdot \lambda_{\infty},$$

где λ_M – коэффициент ослабления массива; λ_{∞} – коэффициент длительной прочности пород; σ_0 – прочность пород, зависящая от глубины отбора проб.

Для условий Интинского месторождения [32] $\lambda_M = 0,17-0,54$, $\lambda_{\infty} = 0,65-0,80$. В результате статистической обработки данных и анализа результатов за деформированием пород вокруг одиночных выработок установлена корреляционная связь между размерами зоны неупругих деформаций пород, длительной прочностью массива пород и наибольшим (вертикальным) напряжением в массиве

$$\frac{R}{R_0} = 1.46 \left(\frac{\sigma_{\infty}^M}{\gamma H} \right)^{-0.55},$$

с коэффициентом корреляции $\eta = 0,939$;

здесь R – радиус зоны неупругих деформаций; R_0 – радиус выработки.

В окончательном виде, после соответствующих подстановок и преобразований, формула приобретает вид:

$$R = 1.46 \cdot R_0 \left(\frac{\gamma H}{\lambda_M \cdot \lambda_{\infty} \cdot \sigma_0} \right)^{-0.55}$$

Установлено, что время формирования зоны неупругих деформаций зависит от показателя:

$$\sigma_{\infty}^M / H;$$

чем меньше это отношение, тем меньше время формирования зоны. Полезным результатом этой работы является то, что полученная формула сравнивалась с аналогичной формулой, выведенной из теории предельного равновесия [14]. Оказалось, что результаты расчетов по ней достаточно хорошо совпадают с результатами наблюдений. Это дает основания для применения теории предельного состояния для решения задач горного давления, когда напряжения в массиве превышают длительную прочность пород массива. Однако в этих формулах остаются неучтенными эффекты неравномерности зоны неупругих деформаций, выражающиеся в том, что размеры этой зоны в кровле выработки и в боках могут отличаться в 2-4 раза. Это говорит о неравнопрочности пород массива относительно угла напластования пород. Введение в формулы зависимости $\sigma_{сж}$ от угла напластования пород α позволит находить контуры зон неупругого деформирования соответствующие данным натурных измерений и более обоснованно рассчитывать нагрузки на крепь горизонтальных выработок.

В этом плане критерий Мора можно использовать также для описания со-

противления сдвигу по структурным плоскостям раздела в породах со слоистой структурой [40]. Предельное сопротивление сдвигу τ в этой плоскости в зависимости от соответствующего нормального напряжения σ выражают в виде прямой

$$\tau = \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi + c,$$

где φ – угол внутреннего трения; c – коэффициент сцепления.

Тогда из теоретических рассмотрений имеем

$$\sigma_z = \frac{c}{\sin \beta \cdot \cos \beta - \cos^2 \beta \cdot \operatorname{tg} \varphi}$$

где c и φ получают из паспорта прочности горной породы, построенного по $\sigma_{\text{сж}}^{\perp}$ и пределу прочности на растяжение σ_p^{\perp} . Графически эта зависимость представлена на рис. 1б, где

$$\sigma_{\text{сж}}(\beta) = \sigma_{\text{сж}}^{\perp} \cdot \sigma_z, \quad 0 \leq \beta \leq 90^{\circ}.$$

Минимальное значение прочности находится для значений угла напластования β от 45° до 75° , со средним $\bar{\beta} = 60^{\circ}$, где прочность принимает абсолютный минимум. По результатам лабораторных испытаний возможно получение прочностных характеристик $\sigma_{\text{сж}}^{\perp}$ и $\sigma_{\text{сж}}^{\parallel}$ (перпендикулярно и параллельно напластованию) и построение зависимости $\sigma(\theta)$ в виде [36]:

$$\sigma_{\text{сж}}(\theta) = A(1 + B \cos 2\theta)$$

Подстановка этой зависимости в эмпирико-аналитическую формулу 14 дает возможность определять радиус зоны разрушенных пород как переменную величину относительно угла θ – угла напластования пород или угла ориентирования плоскостей ослабления, одновременно учитывая при этом коэффициент структурного ослабления, коэффициент длительной прочности, угол внутреннего трения в массиве и отпор крепи. Таким образом, определяется граница зоны возможного (вероятного) разрушения пород (условная зона неупругих деформаций), по размерам и конфигурации которой можно судить о степени устойчивости пород в окрестности горных выработок.

Существуют аналитические формулы плоских кривых простого вида, с помощью которых можно аппроксимировать методом наименьших квадратов конфигурации контура разрушенных пород, отклоняющегося от симметричного по нормали к напластованию пород. Это так называемые кривые Гутшовена [46]. В прямоугольных координатах семейство этих кривых записывается в виде

$$lx^2(x^2 + y^2) = a^2(x^2 + y^2) - ty^2, \quad a > 0, t > 0,$$

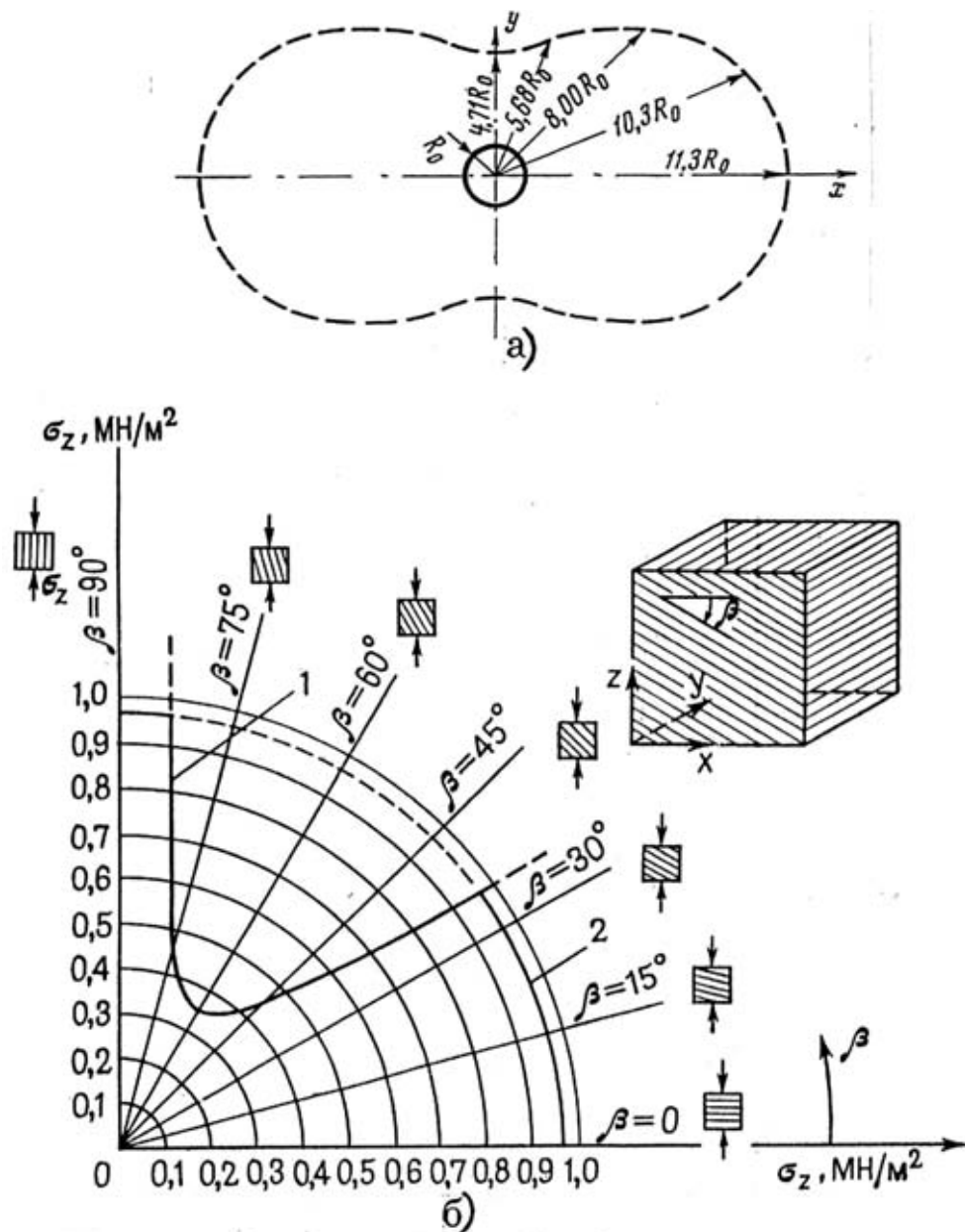


Рис. 1 – а) Форма контура зоны неупругих деформаций для коэффициентов бокового распора неравных единиц. Радиус выработки; б) изменение относительной прочности в зависимости от угла напластования пород β

где a, l, t – параметры. В полярных координатах (ρ, φ) для основного уравнения имеем

$$\rho = \frac{a \cdot l \cdot \sin \varphi}{a + l \cdot \cos \varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

а для дополнительного уравнения

$$\rho = \frac{a \cdot l \cdot \sin \varphi}{a - l \cdot \cos \varphi},$$

при $l < a$ кривая Гутшовена представляет собой ограниченную замкнутую кривую (рис. 2) и по форме своей позволяет представлять несимметричные относительно вертикали границы фронта хрупкого разрушения, в особенности при наклонном расположении пластов, когда зоны разрушения выпуклы и ориентированы по нормали к напластованию пород. При этом возможно учесть также зависимость параметров a и l от $\sigma_{сж} / \gamma H$ и времени t .

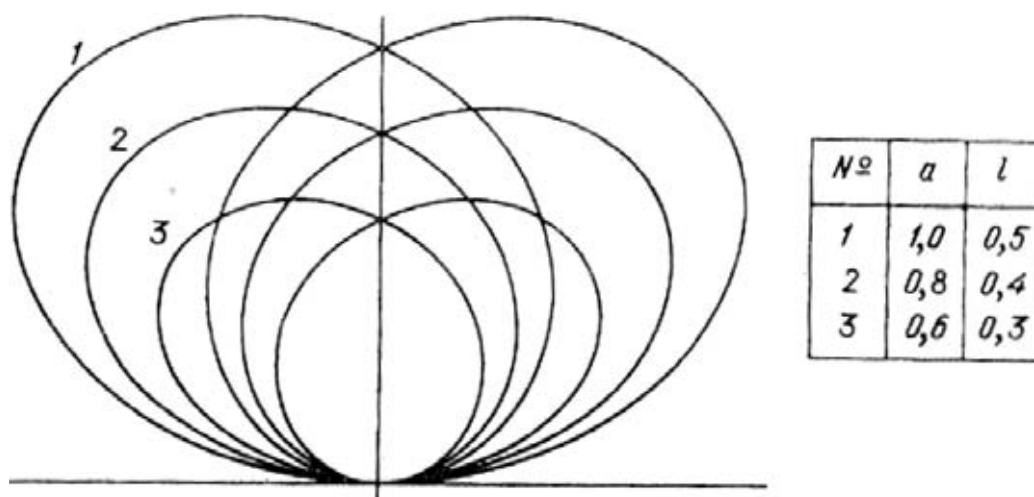


Рис. 2 – Кривые Гутшовена с различными a и l

Для неоднородных породных сред, ослабленных одной или несколькими системами трещин или поверхностями ослабления условие предельного состояния такой среды будет зависеть от угла α между направлением максимально сжимающих напряжений и нормалью к поверхности ослабления.

Для этого вводят так называемое специальное предельное состояние

$$\tau = K^* + \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi^*$$

По данным В.Ю. Изаксона [41], значения угла внутреннего трения для пород угольных месторождений достаточно стабильны и в конкретных расчетах можно принимать $\varphi^* = 20^\circ$. Для приближенной оценки коэффициента сцепления можно пользоваться рекомендациями Г.Н. Кузнецова [42]:

- а) $K^* = (0,6 \div 0,9) \cdot K$ - при учете микрослоистости;
- б) $K^* = (0,3 \div 0,6) \cdot K$ - при учете поверхностей отдельностей;
- в) $K^* = (0 \div 0,3) \cdot K$ - при учете прочности на контактах слоев.

На основе такого подхода строятся векторные диаграммы предельного состояния [42], а затем графическим путем условные зоны нарушений сплошности. Затем оценка устойчивости массива производится на основании анализа условных зон нарушений сплошности, в которых не выполняется условие специального предельного равновесия по поверхностям ослабления. Конфигурация и размеры таким образом полученной зоны дают наглядное представление о наиболее опасных участках контура сечения выработок, о возможных разме-

рах зон реализации сдвигов по плоскостям ослабления. Таким образом, условные зоны как это предполагает Н.С. Булычев [35, 43], можно рассматривать при сравнительном анализе устойчивости пород вокруг различных выработок, при рассмотрении вариантов формы сечения выработки или расположения их относительно систем поверхностей ослабления, т.е. как критерий устойчивости.

Для построения зоны нарушения сплошности необходимо задаться распределением напряжений вокруг выработки. Затем соотношения

$$\tau = f_1(x, y) \quad \text{и} \quad \sigma = f_2(x, y)$$

подставляют в специальное предельное состояние прочности и находят координаты точек границы условной зоны нарушения сплошности. Размеры зон нарушения зависят в первую очередь от формы и размеров сечения выработок, ориентирования плоскостей ослабления и коэффициента бокового распора.

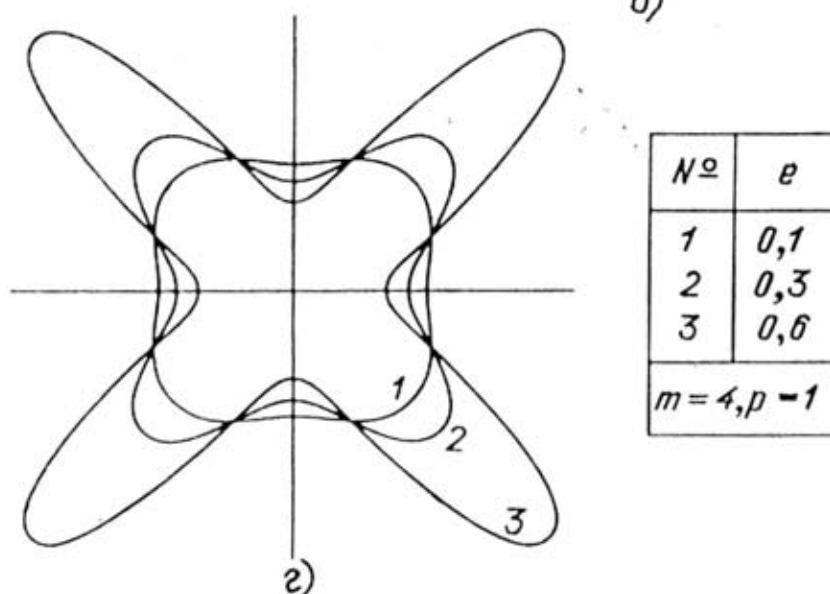
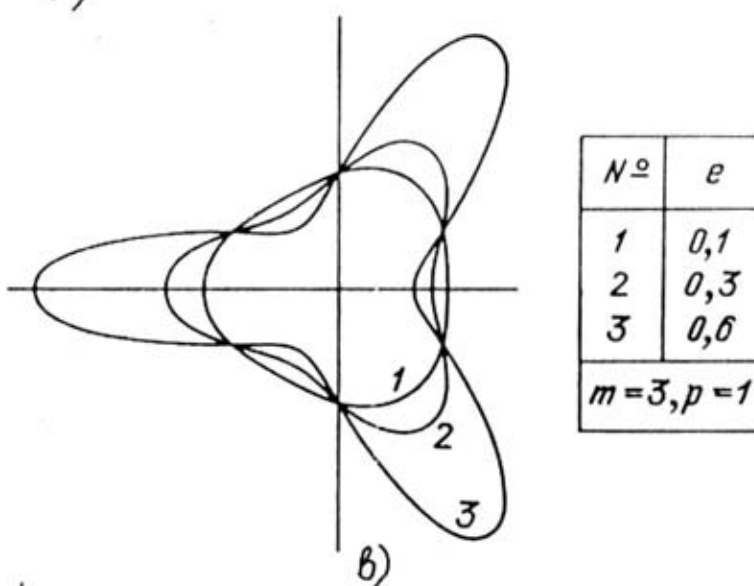
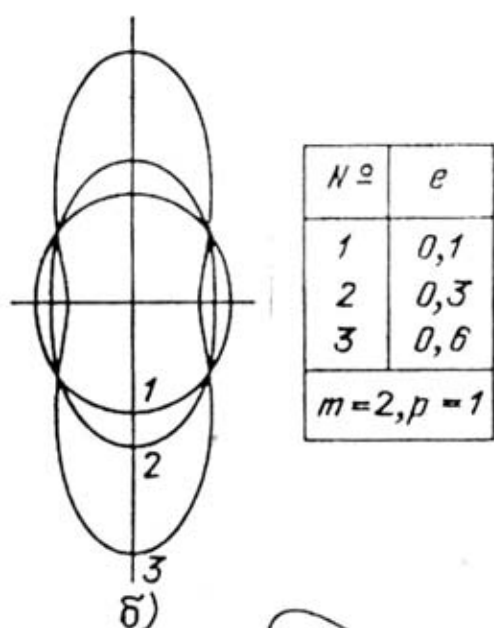
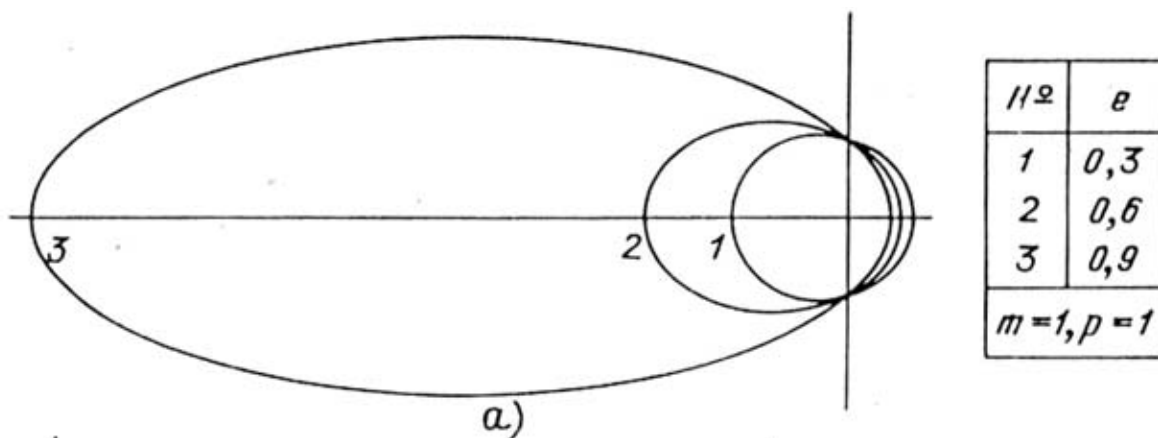
При наличии в окрестности выработки нескольких плоскостей ослабления более универсальной кривой является так называемая плоская кривая с m выпуклостями. Это алгебраическая кривая произвольного порядка представляет собой ограниченную замкнутую связную кривую. Она центрально-симметрична (только при четных значениях m) с m осями симметрии. Уравнение этой кривой в полярных координатах имеет вид [46]:

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cdot \cos m\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

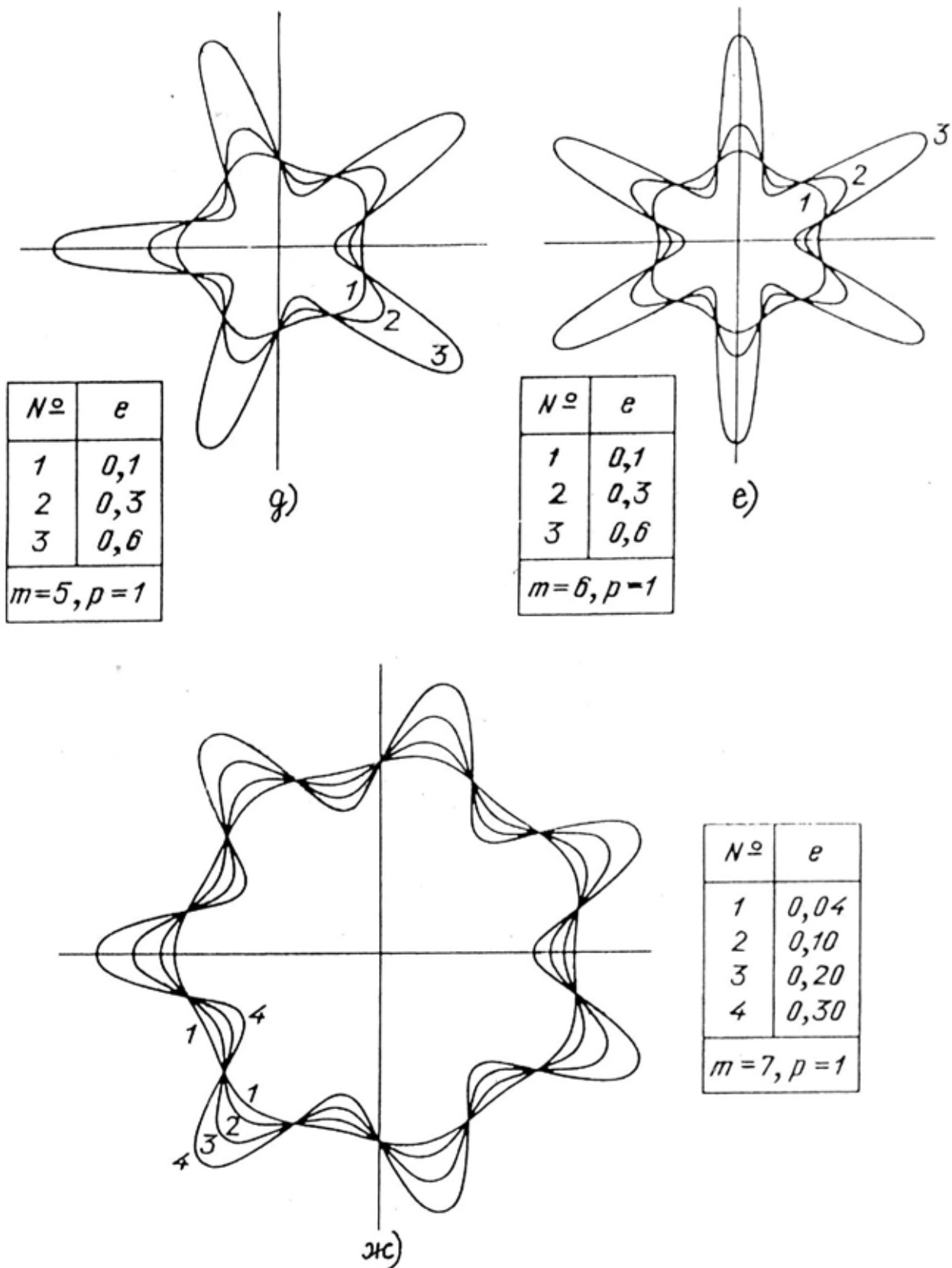
где $p > 0$, $0 < e < 1$, $m = 1, 2, \dots$ - параметры.

Значение m «управляет» количеством выпуклостей кривой от одной, двух и т.д. Кривая имеет небольшое количество параметров (p , e), что делает ее практически удобным средством для представления границ зон разрушенных пород всевозможного очертания. Вытянутая в горизонтальном направлении при $m=1$ (рис. 3а) кривая может аппроксимировать контур разрушения, формирующийся в основном за счет слабых боковых пород. Вертикально вытянутая кривая при $m=2$ (рис. 3б) дает возможность представить вертикально ориентированный контур (с очень слабыми породами в кровле и почве одновременно). Контур разрушенных пород с тремя плоскостями ослабления можно представить кривой с параметром $m=3$ и с тремя выпуклостями (рис. 3в). При четырех взаимно перпендикулярных плоскостях ослабления контур аппроксимируется кривой с $m=4$ (рис. 3г). Если разрушение происходит по 5, 6, 7 плоскостях ослабления, то можно использовать кривые с $m=5, 6, 7$ (рис. 3д, е, ж). Дальнейшее увеличение m становится нецелесообразным, кроме тех случаев, когда необходимо описывать случайные искажения величины напряжений на кольцевую крепь, статическую изменчивость контура разрушенных пород, неоднородность смещений контура выработки. Тогда за счет увеличения m и изменения параметра e можно добиться различной степени абсолютной величины (амплитуды) и характера изменчивости (частоты) показателя относительно кругового контура или близ-

кому к нему очертания. Так же как и кривая Гутшовена, кривая с m выпуклостями может быть линейризована при обработке данных наблюдений методом наименьших квадратов.



а) семейство кривых с одной выпуклостью; б) семейство кривых с 2-мя выпуклостями; в) семейство кривых с 3-мя выпуклостями; г) семейство кривых с 4-мя выпуклостями;



д) семейство кривых с 5-ю выпуклостями; е) семейство кривых с 6-ю выпуклостями;
 ж) семейство кривых с 7-ю выпуклостями

Рис. 3 – Кривые с t выпуклостями

Н.С. Булычевым и Н.Н. Фотиевой [43] на основе логического развития существующих критериев устойчивости предлагается новый интегральный критерий устойчивости пород по конфигурации и размерам условных (наиболее вероятных) зон неупругих деформаций пород вокруг выработок, заключающийся в сопоставлении напряжений массива, ослабленного выработкой, с прочностью пород для объемного напряженного состояния [35]. Критерии устойчивости пород в окрестности горных выработок устанавливаются на основании натуральных наблюдений и сопоставлении конфигурации и размеров зон неупругих деформаций с фактическим состоянием пород вокруг выработок. Тогда степень устойчивости пород оценивается по размеру условной зоны, а в качестве критерия принимается максимальная протяженность условной зоны неупругих деформаций в направлении, нормальным контуру сечения выработки.

В работах Г.Г. Литвинского [44, 45] установлены фундаментальные закономерности перераспределения напряжений в результате изменения и движения фронта хрупкого разрушения: при увеличении кривизны контура напряжения всегда в этом месте возрастают, а при уменьшении кривизны – снижаются. С другой стороны, основные закономерности разрушения контура, связанные с его формоизменением, сводятся к следующему: при разрушении от растягивающих напряжений устойчивость выработки возрастает, а при разрушении от сжимающих напряжений – убывает. Таким образом, на основе установленных закономерностей разрушения, движения фронта хрупкого разрушения, формоизменения контура разрушенных пород вокруг выработки под действием изменяющегося поля напряжений, можно произвести классификацию проявлений горного давления в окрестности выработок. Такую классификацию необходимо рассматривать также с учетом размеров областей запредельного деформирования, остаточной прочности и смещения контура выработки [31], т.е. с выделением 4-х областей механического состояния массива:

1) допредельная деформация породных массивов; при этом вблизи породных обнажений могут возникать отдельные области запредельного деформирования и разрушения горных пород, однако размеры этих областей ограничены и не определяют общей устойчивости выработок, и их состояние остается равновесным;

2) в приконтурном массиве формируется две области механического состояния: допредельная и запредельная, где породы находятся в состоянии переменной прочности (от остаточной до полной), при этом область запредельного деформирования существенно зависит от склонности горных пород к хрупкому разрушению, которую можно подразделить на 3 подкласса: модуль спада M стремится к бесконечности $M \rightarrow \infty$ -хрупкое разрушение, M принимает конечное значение $M = const$ и $M \rightarrow 0$ – упруго-пластическое поведение [35, 43];

3) образование 3-х областей механического состояния – допредельной, запредельной и остаточной прочности, при этом горные породы находятся в частично разрушенном состоянии, сохраняя некоторую несущую способность и формируют локальное вывалообразование или обрушаются на конструкцию крепи в виде больших вывалов;

4) образование 4-х областей в приконтурном массиве: допредельной, запре-

дельной, остаточной прочности и руинного разрушения; при этом горные породы в пределах области руинного разрушения находятся в полностью разрушенном и неустойчивом состоянии, формируя сплошное вывалообразование и заданную нагрузку на крепь.

Для установления критерия устойчивости пород на основе вероятной зоны неупругих деформаций необходимо сопоставить конфигурацию и размеры зоны неупругих деформаций с действительным состоянием пород вокруг выработок. Тогда в качестве критерия, как это рекомендует Н.С. Булычев [35,43], можно принять размер этой условной зоны – максимальную протяженность условной зоны R_{max} в направлении, нормальном к контуру сечения выработки. Тогда, в первом приближении, классификация выглядит таким образом: вполне устойчивые породы, устойчивые, средней устойчивости, неустойчивые, весьма неустойчивые, сильнонеустойчивые. Категория пород по устойчивости приведена в таблице 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диплом № 188. Приоритет открытия 19.02.2001г. Явление образования перемещающихся нарушенных зон в напряженных горных породах/ В.Я.Кириченко, Е.Л.Звягильский, А.В.Лишин и др. – Научные открытия (Сб. кратких описаний научных открытий, научных идей, научных гипотез. - 2001г.). - М.: РАЕН, 2002. - С. 62-63.
2. Открытие № 400 СССР. Явление зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземных выработок / Е.И.Шемякин, М.В.Курленя, В.Н.Опарин и др. – Бюллетень изобретений, 1982, № 1.
3. Зональная дезинтеграция горных пород вокруг подземных выработок / Е.И.Шемякин, Г.Л.Фисенко, М.В.Курленя и др. // ч. I ФТПРПИ, 1986, №3. - С. 3-15; ч. II ФТПРПИ, 1986, №4.- С. 3-13; ч. III ФТПРПИ, 1987, №1.- С. 3-8; ч. IV ФТПРПИ, 1989, №4.- С. 3-9.
4. Fenner R. Untersuchungen zur Erkenntnis des Gebirgsdruckes// Glückauf 1938, 74. № 32.-s. 681-695, № 33. – S. 705-715.
5. Феннер Р. Исследование горного давления // Вопросы теории горного давления.-М.: Госгортехиздат, 1961.- С. 5-58.
6. Westergard H.M. Plastic state of stress around a deep well// J.Boston Society of Civil Engineers, 1940, № 27.
7. Labasse H. Les pressions de terrains autour des puits // Revue Universelle des Mines, 1949, 5, № 1-3; 1950,6 № 1-2.
8. Лабасс А. Давление горных пород в угольных шахтах // Вопросы теории горного давления.- М.: Госгортехиздат, 1961.- С. 59-164.
9. Kastner H. Über der echten Gebirgsdruck beim Bautieflienger Tunnel// Österr. Bauzeitschr., 1949, № 10-11.
10. Kastner H. Statik des Tunnels – und Stollenbaues auf der Grundlage geomechanischer Erkenntnisse.-Berlin: Springer, 1962.-313 s.
11. Talobre N. La mecanique des roches. – Paris : Dunod, 1957.
12. Талобр Ж. Механика горных пород.- М.: Госгортехиздат, 1960.- 430 с.
13. Фисенко Г.Л. Взаимодействие крепи и пород в капитальных горных выработках // Горное давление и горные удары (Тр. ВНИМИ, Сб. 82) – Л.: ВНИМИ, 1971. – С. 265-272.
14. Фисенко Г.Л. Предельные состояния горных пород вокруг выработок.- М.: Недра, 1976. – 272 с.
15. Caguot A. , Kerisel J. Traite de mecanique des sols. – Paris: Gauthier – Villars, 1949.
16. Мостков В.М. Подземные сооружения большого сечения. – М.: Недра, 1974. – 320 с.
17. Галин Л.А. Плоская упруго-пластическая задача // Прикладная математика и механика, 1946, 10, №3. – С. 367-386.
18. Ивлев Д.Д. Приближенное решение задач определения упруго-пластического состояния тел методом малого параметра: Автореф. дис. канд. физ.-мат.наук / МГУ.- М., 1956.
19. Ивлев Д.Д. Приближенное решение упруго-пластических задач теории идеальной пластичности // ДАН СССР, 1957, 113, №2. – С. 294-296.
20. Сажин В.С. Упруго-пластическое распределение напряжений вокруг горных выработок различного очертания.- М.: Наука, 1968. – 90 с.
21. Руппенейт К.В. О давлении на крепь в штрекообразных выработках // Вопросы горного дела.- М.: Углетехиздат, 1953. – С. 312-364.
22. Руппенейт К.В. Некоторые вопросы механики горных пород. - М.: Углетехиздат, 1954. – 384 с.

Таблица 2 – Классификация устойчивости пород в подземных выработках

Категория (класс)	Степень устойчивости пород	Форма проявления горного давления и особенности разрушения пород	Взаимодействие крепи и массива	Локальные размеры зоны неупругих деформаций $R_{\max, м}$
I	Весьма устойчивые	Контур устойчив. Разрушение от неровностей. Изолированные вывалы случайного характера.	Нагрузка на крепь отсутствует или является незначительной. Массив находится в состоянии допределенного деформирования	-
II	Устойчивые	Локальное взаимовлияющее вывалообразование в кровле, почве или в кровле и в почве одновременно. Породы обрушаются на крепь в виде отдельных вывалов. Породные массивы в основном представлены пластическим материалом или близким к нему $M \rightarrow 0$	После вывалообразования разрушение самопроизвольно останавливается. Нагрузка на крепь находится в режиме заданного неравномерного вывалообразования.	$R_{\max} \leq 0,2$
III	Средней устойчивости	Сводообразование в кровле или одновременно в кровле и почве, пучение в почве от набухания пород. Материал в основном с промежуточным поведением: от пластического до хрупкого с конечным диапазоном для M .	Режим заданной нагрузки. Образование свода естественного равновесия, после чего разрушение пород прекращается и полость считается устойчивой.	$R_{\max} \leq 0,4$
IV	Неустойчивые	Сводообразование в почве, почве и кровле или только в кровле, иногда пучение пород в почве. Породы в основном хрупкого поведения, с M достаточно большим	Режим заданной нагрузки с кровли и боков. Выработка приближается к устойчивой форме, хотя большая часть приконтурного массива разрушена	$R_{\max} \leq 1$
V	Весьма устойчивые	Разрушение от сжатия в боках первично и является причиной разрушения от растяжений в почве или кровле, часто пучение. Горные породы ближе к пластическим, чем к хрупким средам	Выработка существенно неустойчива и нуждается в подпорном типе крепи с податливым режимом работы	$1 < R_{\max} \leq 4$
VI	Сильно неустойчивые	Разрушение происходит на большей части контура выработки; породы в области ruinного разрушения находятся в полностью разрушенном и в неустойчивом состоянии. Породы в основном хрупкие, склонные к ruinному разрушению	Режим взаимодействующей деформации. Выработка нуждается в мощной жесткой крепи, работающей во взаимодействии массива с крепью	$R_{\max} > 4$

23. Сажин В.С. Определение области неупругих деформаций с учетом изменения сцепления породы // ФТПРПИ, 1967, № 6. – С. 93-95.
24. Дружко Е.Б. О взаимодействии системы «крепь – массив» с учетом образования зоны неупругих деформаций // Проектирование и строительство угольных предприятий, 1968, № 9. – С. 19-22.
25. Дружко Е.Б., Заславский Ю.З., Перепичка Ф.И. Устойчивость основных горных выработок. – Донецк: Донбасс, 1975. – 144 с.
26. Либерман Ю.М. Давление на крепь капитальных выработок. – М.: Наука, 1969. – 120 с.
27. Egger P. Einfluss des Post – Failure Verhaltens von Fels auf den Tunnelbausam// Veröff. Inst. Bodentech.Felsmech., Univ. Karlsruhe, 1973., 57. – S. 1-83.
28. Алимжанов М.Т. Об определении толщины монолитной крепи / Прикладные задачи механики горных пород. – Алма-Ата: Наука, 1971. – С.153-160.
29. Алимжанов М.Т. Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород. – Алма-Ата: Наука, 1982. – 272 с.
30. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механика горных пород. – М.: Недра, 1975. – 271 с.
31. Баклашов И.В. Деформирование и разрушение породных массивов. – М.: Недра, 1988. – 271 с.
32. Костомаров Н.Е. Влияние прочности массива на размер зоны неупругих деформаций пород вокруг одиночной выработки / Горное давление и горные удары (Тр.ВНИМИ, Сб.103). – Л: ВНИМИ, 1977. – С. 67-70.
33. Парчевский Л.Я., Шашенко А.Н. О размерах области пластических деформаций вокруг горных выработок // Изв. вузов. Горный журнал, 1988, № 3.- С. 38-43.
34. Виноградов В.В. Геомеханика управления состоянием массива вблизи горных выработок. – К. : Наук. думка, 1989. – 192 с.
35. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах. – М.: Недра, 1989. –270 с.
36. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Механика деформирования и разрушения горных пород. – М.: Недра, 1992. – 224 с.
37. Глушко В.Т., Чередниченко В.П., Усатенко Б.С. Реология горного массива. – К.: Наук. думка., 1981. – 172 с.
38. Весков М.И. Разработка инженерного метода расчета устойчивости горных выработок на основе теоретических и экспериментальных исследований вязко-пластического течения пород: Автореф.дисс. д-ра техн. наук/ ИГД им. А.А. Скочинского. – М., 1972. – 37 с.
39. Заславский Ю.З. Исследование проявлений горного давления в капитальных выработках глубоких шахт Донецкого бассейна. – М.: Недра, 1966. – 180 с.
40. Виттке В. Механика скальных пород. – М.: Недра, 1990. – 439 с.
41. Изаксон В.Ю. О зоне нарушений сплошности вокруг горизонтальной выработки круглого сечения в массиве с поверхностями ослабления // Современные проблемы механики горных пород. – Л.: Наука, 1972. – С. 71-73 .
42. Графические методы оценки предельных состояний трещиноватого массива вокруг горных выработок // Современные проблемы механики горных пород. – Л.: Наука, 1972. – С. 34-44.
43. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений. – М.: Недра, 1982. – 270 с.
44. Литвинский Г.Г. Классификация проявлений горного давления по закономерностям разрушения пород вокруг подземных выработок // Разработка месторождений полезных ископаемых, 1981, Вып.60. – С. 3-12.
45. Литвинский Г.Г. Статика и кинетика процессов разрушения и неупругого деформирования горных пород в подземных выработках: Автореф. дисс. д-ра техн. наук /МГИ. – М., 1977 – 30 с.
46. Шикин В.Е., Франк-Каменецкий М.М. Кривые на плоскости и в пространстве./ Справочник с применением дискеты «Плоские кривые». – М.: Фазис, 1997. – 336 с.